15891

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1995 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1995 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1995

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
PURE MATHEMATICS I

01 S I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (i) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\cdots$

ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය u_r ද

$$f(r)=\frac{-1}{4(r+2)(r+4)} \quad \text{ද නම්}$$

$$f(r)-f(r-2)=u_r \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\sum_{r=1}^{n} u_r$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r=\frac{11}{96}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) n නම් ඕනෑම සෘණ නොවූ නිඛිලයක් සඳහා n^7-n යන්න 7 න් බෙදිය හැකි බව, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යොදාගනිමින් සාධනය කරන්න. සෘණ නිඛිල සඳහා ප්‍රතිඵලය අපෝහනය කරන්න. n^7-n සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන් n නම් ඕනෑම නිඛිලයක් සඳහා එය 3 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න.

n නම් ඕනෑම ඔත්තේ නිඛිලයක් සඳහා n^7-n යන්න 168 න් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න.

2. (i) $7-x \geq 2\left|x^2-4\right|$ තෘප්ත කරන්නා වූ x හි අගයන් සොයන්න.

(ii) ඕනෑම ධන x සඳහා

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

a, b හා c යනු ධන සංඛ්‍යා වේ.

ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කර ගනිමින්

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ බව පෙන්වන්න.

$a+b+c=1$ නම් $2-a$, $2-b$ හා $2-c$ ධන බව පෙන්වා

$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\geq\frac{3}{5}$ බව අපෝහනය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (i) $2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 8y + 15 = 0$ නම් $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ හා $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ අතර x පැවතිය නොහැකි බව ද 1 හා 3 අතර y පැවතිය නොහැකි බව ද පෙන්වන්න; මෙහි x හා y තාත්ත්වික වේ.

(ii) $(a + b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

a හා $b \, (a \neq b)$ තාත්ත්වික නම් ඉහත සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් ඇති බව සාධනය කරන්න.

$x^3 - 6x - 6 = 0$ සමීකරණය ඉහත ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර, එයට ඇත්තේ තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් යැයි දී ඇත් නම්, එම මූලය සොයන්න.

4. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

k නිඛිලයක් විට, $p = \cos (6k + 1)\frac{\pi}{9} + i \sin (6k + 1)\frac{\pi}{9}$ නම්,

(a) $p^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

සහ (b) $\bar{p}^3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

බව පෙන්වන්න; $\bar{p}$ යනු p හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය යි.

$z^6 - 8z^3 + 64 = 0$ සපුරාලන z^3 හි අගය දෙක සොයා, ඒ නයින් එම සමීකරණයේ ප්‍රභින්න මූල හය නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $x^2 - ax \cos\phi + b$ ආකාරයේ වූ තාත්ත්වික වර්ගජ සාධක තුනක ගුණිතය ලෙස $x^6 - 8x^3 + 64$ ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි a, b, ϕ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

5. z_1 සහ z_2 යනු දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකකි. $z_2 - z_1$ සහ $\frac{z_2}{z_1}$ ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ආකාරය පෙන්වන්න.

$z_0 = \cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7}$ ද z_0, z_0^3, z_0^9 සංඛ්‍යා පිළිවෙළින් P, Q, R ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වන්නේ ද නම් PQR ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද බව පෙන්වා එහි කෝණ සොයන්න.

$z_1 = \omega z_0$, $z_2 = \omega z_0^3$ සහ $z_3 = \omega z_0^9$; මෙහි $\omega = \cos\frac{3\pi}{14} + i \sin\frac{3\pi}{14}$.

$$\text{විස්} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}\right) = \frac{3\pi}{7}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

6. (i) වරකට අක්ෂර සියල්ල ම ගනිමින් *KANAKARAYANKULAM* යන වචනයෙහි අක්ෂර දහසයෙන්ම සෑදිය හැකි විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (උත්තරය සුළු කිරීම අනවශ්‍යයි.)

ඉහත වචනයෙන් (A, U) ස්වරාක්ෂර අත්හැර වරකට අක්ෂර හතර බැගින් ගෙන සෑදිය හැකි සංයෝජන ගණන 41 ක් බව පෙන්වන්න.

(ii) ගැහැණු ළමුන් දෙදෙනෙකු එක ළඟ නොසිටින පරිදි, පිරිමි ළමුන් හය දෙනෙකු සහ ගැහැණු ළමුන් හතර දෙනෙකු, කී ආකාරයකින් වෘත්තාකාරව පිළියෙල කළ හැකි ද?

7. n ධන නිඛිලයක් විට, $(1+x)^n$ සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ඉහත ප්‍රසාරණය යොදා, විකිය ක්‍රමයකින්

$$^nC_0 + 2.\ ^nC_1x + 3.\ ^nC_2x^2 + \dots + (n+1).\ ^nC_nx^n$$

යන්න, $[1+(n+1)x]\ (1+x)^{n-1}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න; මෙහි ^nC_r ට එහි සුපුරුදු අර්ථය ඇත.

(i) $[1+(n+1)x]\ (1+x)^{2n-1}$ ප්‍රසාරණය කිරීමෙන් හා x^n හි සංගුණකය සැලකීමෙන්,

$$(^nC_0)^2 + 2.\ (^nC_1)^2 + 3.\ (^nC_2)^2 + \ .\ .\ .\ + (n+1).\ (^nC_n)^2$$

ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය, $\dfrac{(n+2)\ (2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න; n යනු ධන නිඛිලයකි.

(ii) n ඉරට්ටේ නම්,

$$^nC_0 + 3.\ ^nC_2 + 5.\ ^nC_4 + \ .\ .\ .\ + (n+1).\ ^nC_n$$

ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයන්න.

8. (i) ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දැක්වීමෙන් පටන් ගෙන,

$$y = -\cot x - x$$

ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

(ii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර, එවා

$$x\ \frac{dy}{dx} = 3\ (y^2x^6 - y + 4)$$

යන්නෙන් සම්බන්ධ වී ඇත.

(a) $y = \dfrac{2}{x^3}\ \tan\ (2x^3 - \alpha)$ යන්න ඉහත සම්බන්ධය සපුරාලන බව, සෘජු ආදේශයෙන් පෙන්වන්න; මෙහි α නියතයකි.

(b) එම සම්බන්ධය

$$\frac{dv}{dx} = 3x^2(4 + v^2)$$

යන්නට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $v = x^3y$.

(iii) $x = 2t^3 + 1$ සහ $y = 4t^4 - 1$ නම්,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න

9. (i) $\int \frac{5x+3}{(x-1)\ (x+1)^2}\ dx$ සොයන්න.

(ii) $x+1=\frac{1}{t}$ ආදේශයෙන්, $\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)\ (4x-3-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{[(4t-1)\ (1-2t)]^{\frac{1}{2}}}$ බව පෙන්වන්න.

$t=\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta$ යෙදීමෙන්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, අනුකලයේ අගය $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^4\theta\ d\theta = \frac{8}{315}$ බව පෙන්වන්න.

10. (a) ආසන්න අනුකලනය සඳහා සිම්සන් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.
කෝටික 5 ක් සලකමින්, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ මගින් π ට ආසන්න අගයක් සෙවීමට සිම්සන් නීතිය උපයෝගී කර ගන්න.

(b) $f(x)=e^{\sin^{-1}x}$ නම්

$(1-x^2)f^{(2)}(x)-x\ f^{(1)}(x)=f(x)$ බව ද

$(1-x^2)f^{(3)}(x)-3x\ f^{(2)}(x)=2\ f^{(1)}(x)$ බව ද

පෙන්වන්න. මෙහි $f^{(r)}(x)=\frac{d^r}{dx^r}f(x)$.
ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ r නම් ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා

$(1-x^2)f^{(r+2)}(x)-(2r+1)\ x\ f^{(r+1)}(x)=(1+r^2)f^{(r)}(x)$ බව සාධනය කරන්න.
$e^{\sin^{-1}x}$ හි මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{5x^4}{4!}+\ \cdots$$

බව පෙන්වන්න.

11. (i) $x=2\ (1+\sin\theta)$ හා $y=2\cos 2\theta$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\theta\ \left(\neq \frac{n\pi}{2}\right.$; මෙහි n යනු ඔත්තේ නිඛිලයකි.$\left.\right)$ පරාමිතිය සහිත ලක්ෂයේ දී වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලබාගන්න.
වක්‍රයේ දළ කටු සටහනක් අඳින්න. $\theta=-\frac{\pi}{2}$ සහ $\theta=\frac{\pi}{2}$ දී ස්පර්ශක ගැන කුමක් කිව හැකි ද?

(ii) $x=2+t$ හා $y=2-t^2$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C' වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි $-\infty<t<\infty$ වේ. වක්‍රයේ දළ කටු සටහනක් අඳින්න.

ඉහත (i) හි සහ (ii) හි ඇති C, C' වක්‍ර එක එකෙහි සමීකරණවල කාටීසියානු ආකාර එකම බව පෙන්වන්න. වක්‍ර දෙක වෙනස් මන් දැයි පැහැදිලි කරන්න.

12. පිළිවෙළින් $y^2=x$ හා $y=2-x^2$ සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වක්‍රයන්හි කටු සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.
C_1 හා C_2 වක්‍ර දෙක හා $y=2$ සරල රේඛාව මගින් සපරියන්ත S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.
S පෙදෙස $4x+1=0$ රේඛාව වටා සෘජුකෝණ හතරකින් භ්‍රමණය කළ විට ජනනය වන පරිමාව සොයන්න.